ROYAUME DU MAROC
Ministère de l'Éducation Nationale
AREF Marrakech – Safi
DP : Marrakech
Lycée Qualifiant Toubkal

SAKINE PRO
1ère Année Bac_Sc
Année Scolaire : 2026 – 2027

Matière : Mathématiques
Enseignant :
Pr. SAKINE BADR

SÉRIE D'EXERCICES N° 02 : GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS — CORRIGÉ

CORRIGÉ DÉTAILLÉ DES 20 EXERCICES • RÉDACTION TYPE

Exercice 1 — Ensemble de définition ★

Méthode. Un dénominateur doit être non nul ; l'expression sous une racine carrée doit être positive ou nulle (strictement positive si la racine est au dénominateur).

1) f est un polynôme : $D_f = \mathbb{R}$

2) $2x-4 \neq 0 \iff x \neq 2$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

3) $x^2-4 \neq 0 \iff x \neq \pm 2$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

4) $2x^2-5x-3=0$: $\Delta = 49$, racines $-\frac{1}{2}$ et 3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

5) $-3x+6 \geq 0 \iff x \leq 2$: $D_f =]-\infty;2]$

6) $x+2 \geq 0$ et $x \neq 1$: $D_f = [-2;1[\cup]1;+\infty[$

7) $x \neq 0$ et $-x \geq 0$, donc $x < 0$: $D_f =]-\infty;0[$

8) $x^2+1 \geq 1 > 0$ pour tout réel x : $D_f = \mathbb{R}$

9) $2x^2-3x+1 \geq 0$: $\Delta = 1$, racines $\frac{1}{2}$ et 1 ; $a = 2 > 0$, donc positif à l'extérieur des racines. $D_f =]-\infty;\frac{1}{2}] \cup [1;+\infty[$

10) $-2x^2+x+3 > 0$: $\Delta = 25$, racines -1 et $\frac{3}{2}$; $a = -2 < 0$, donc strictement positif entre les racines. $D_f =]-1;\frac{3}{2}[$

11) $2x-1 \geq 0$ et $3-5x \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$ et $x \leq \frac{3}{5}$. $D_f = \left[\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right]$

12) $\frac{-9x+3}{x+1} \geq 0$ et $x \neq -1$. Tableau de signes : le quotient est positif pour $-1 < x \leq \frac{1}{3}$. $D_f =]-1;\frac{1}{3}]$

Exercice 2 — Égalité de deux fonctions ★

Rappel. $f = g$ signifie : $D_f = D_g$ et $f(x) = g(x)$ pour tout x de cet ensemble.

1. $D_h = \mathbb{R}^*$ et $D_t = \mathbb{R}$. Comme $D_h \neq D_t$: $h \neq t$.
   (Cependant, pour tout $x \neq 0$: $h(x) = \frac{x(x-1)}{x} = x-1 = t(x)$.)
2. D_f : $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$ et $x \neq -3$, d'où $D_f =]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$.
   D_g : $x-1 \geq 0$ et $x+3 > 0$, d'où $D_g = [1;+\infty[$.
   $D_f \neq D_g$, donc $f \neq g$. (Elles coïncident seulement sur $[1;+\infty[$.)

Exercice 3 — Étude de la parité ★

Méthode. On vérifie d'abord que D_f est symétrique par rapport à 0, puis on calcule $f(-x)$.

1. $D_f = \mathbb{R}$; $f(-x) = 3x^2-5 = f(x)$: **paire**
2. $D_f = \mathbb{R}^*$; $f(-x) = -\frac{3}{x} = -f(x)$: **impaire**
3. $D_f = \mathbb{R}^*$; $f(-x) = \frac{x^2-1}{-x} = -f(x)$: **impaire**
4. $D_f = \mathbb{R}^*$; $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$: $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$. **ni paire ni impaire**
5. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$; $f(-x) = \frac{|-x|}{x^2-1} = f(x)$: **paire**
6. $D_f = [-1;1]$; $f(-x) = \sqrt{1-x^2} = f(x)$: **paire**
7. $D_f = \mathbb{R}$; $f(-x) = \frac{-2x^3}{x^2+5} = -f(x)$: **impaire**
8. $D_f = \mathbb{R}$; $f(-x) = |x| - \sqrt{2x^2+4} = f(x)$: **paire**

Exercice 4 — Parité et équation fonctionnelle ★★

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. La relation (1) : $5f(x)+f(-x) = 2x^3-3x$ est vraie pour tout réel ; en remplaçant x par $-x$:
   $$(2) : \ 5f(-x)+f(x) = -2x^3+3x$$
   En additionnant (1) et (2) : $6\big(f(x)+f(-x)\big) = 0$, donc $f(-x) = -f(x)$. **f est impaire**
2. Dans (1), on remplace $f(-x)$ par $-f(x)$: $4f(x) = 2x^3-3x$, d'où $f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{4}$

Exercice 5 — Taux de variation ★

Rappel. Pour $x_1 \neq x_2$: $T = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. Si $T > 0$ sur I, f est strictement croissante sur I ; si $T < 0$, strictement décroissante.

1. $T_f = \frac{7x_1-7x_2}{x_1-x_2} = 7 > 0$: **f strictement croissante sur $\mathbb{R}$**
2. $T_g = \frac{\frac{2}{x_1}-\frac{2}{x_2}}{x_1-x_2} = \frac{2(x_2-x_1)}{x_1x_2(x_1-x_2)} = \frac{-2}{x_1x_2}$.
   Sur $]0;+\infty[$ comme sur $]-\infty;0[$, $x_1x_2 > 0$ donc $T_g < 0$: **g strictement décroissante sur chacun des deux intervalles**
3. $T_h = \frac{3(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2} = 3(x_1+x_2)$.
   Sur $[0;+\infty[$: $x_1+x_2 > 0$, donc **h strictement croissante**.
   Sur $]-\infty;0]$: $x_1+x_2 < 0$, donc **h strictement décroissante**.

Exercice 6 — Variations d'un quotient ★★

1. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Pour $x_1 \neq x_2$ dans D_g :
$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$$
donc $T_g = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$
2. Sur $]-\infty;-1[$: $x_1+1<0$ et $x_2+1<0$, donc $T_g>0$.
Sur $]-1;+\infty[$: $x_1+1>0$ et $x_2+1>0$, donc $T_g>0$.
g est strictement croissante sur chacun des deux intervalles.

Exercice 7 — Étude de $x+\frac{1}{x}$ ★★★

1. $D_f = \mathbb{R}^*$, symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -f(x)$: **f est impaire**
2. $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) + \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = (x_1 - x_2)\left(1 - \dfrac{1}{x_1 x_2}\right)$, donc $T_f = \dfrac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}$
3. Sur $]0;1]$: $0 < x_1 x_2 < 1$ (car $x_1 \neq x_2$), donc $T_f < 0$: f est strictement décroissante.
Sur $[1;+\infty[$: $x_1 x_2 > 1$, donc $T_f > 0$: f est strictement croissante.
4. f est impaire, donc elle a le même sens de variation sur deux intervalles symétriques par rapport à 0 : croissante sur $]-\infty;-1]$, décroissante sur $[-1;0[$. De plus $f(1)=2$ et $f(-1)=-2$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f		↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	

Exercice 8 — Comparaison de fonctions ★

1. $g(x) - f(x) = x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x. Donc **$g > f$ sur $\mathbb{R}$** : $(\mathcal{C}_g)$ est strictement au-dessus de $(\mathcal{C}_f)$.
2. Pour $x \neq 0$: $u(x) - v(x) = x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$u(x)-v(x)$	$-$		0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Sur $]0;+\infty[$: $u < v$ sur $]0;1[$ et $u > v$ sur $]1;+\infty[$.
Sur $]-\infty;0[$: $u < v$ sur $]-\infty;-1[$ et $u > v$ sur $]-1;0[$.
Points d'intersection : **$A(1;1)$ et $B(-1;-1)$**

Exercice 9 — Fonctions majorées, minorées, bornées ★

1. $\dfrac{1}{4} - f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, donc **$f(x) \leq \dfrac{1}{4}$ pour tout réel x**
2. Pour tout réel x : $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-4 \leq 4\sin x \leq 4$, puis **$-7 \leq g(x) \leq 1$**. g est minorée par -7 et majorée par 1 : elle est bornée.
3. $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. L'inverse d'un nombre supérieur ou égal à 1 est compris entre 0 (exclu) et 1 : **$0 < \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$**

Exercice 10 — Encadrement d'une fonction rationnelle ★★

Méthode. Pour montrer $f(x) \geq m$, on étudie le signe de $f(x) - m$.

1. $x^2 + 3x + 3$: $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$, donc $x^2 + 3x + 3 > 0$ pour tout réel x (signe de $a = 1$). Le dénominateur ne s'annule jamais : **$D_f = \mathbb{R}$**
2. $f(x) - 1 = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 3} = \dfrac{(x+2)^2}{x^2 + 3x + 3} \geq 0$, donc **$f(x) \geq 1$**
3. $\dfrac{7}{3} - f(x) = \dfrac{7(x^2+3x+3) - 3(2x^2+7x+7)}{3(x^2+3x+3)} = \dfrac{x^2}{3(x^2+3x+3)} \geq 0$, donc **$f(x) \leq \dfrac{7}{3}$**

Remarque : $f(-2) = 1$ et $f(0) = \frac{7}{3}$; ces deux bornes sont donc atteintes.

Exercice 11 — Extremums d'une fonction ★

Rappel. $f(a)$ est le minimum absolu de f sur I si $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I (maximum : $f(x) \leq f(a)$).

1. $5x^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq 3 = f(0)$.
Minimum absolu : 3, atteint en $x = 0$
2. $-4x^2 \leq 0$, donc $g(x) \leq 1 = g(0)$.
Maximum absolu : 1, atteint en $x = 0$
3. $6 - (2x-1)^2 = 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5 = k(x)$.
Comme $(2x-1)^2 \geq 0$: $k(x) \leq 6$, et $k\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.
Maximum absolu : 6, atteint en $x = \frac{1}{2}$

Exercice 12 — Majorant ou maximum ? ★★

1. $3 - f(x) = \dfrac{3x^2 + 3 - 2x^2 - 3}{x^2+1} = \dfrac{x^2}{x^2+1} \geq 0$, donc $f(x) \leq 3$.
De plus $f(0) = 3$: la valeur 3 est atteinte.
3 est le maximum absolu de f
2. $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} > 0$, donc $f(x) > 2$: f est minorée par 2.
L'inégalité est stricte : l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution.
2 est un minorant mais pas un minimum

Exercice 13 — Extremums et radicaux ★★★

1. Pour $x \geq 0$: $f(x) + 1 = \dfrac{\sqrt{x} - 2 + \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \geq 0$, donc $f(x) \geq -1$.
Et $f(0) = \dfrac{-2}{2} = -1$.
-1 est le minimum absolu, atteint en $x = 0$
2. $1 - f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 2 - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{4}{\sqrt{x}+2} > 0$, donc $f(x) < 1$: f est majorée par 1.
L'inégalité est stricte, donc $f(x) = 1$ est impossible.
1 n'est pas un maximum

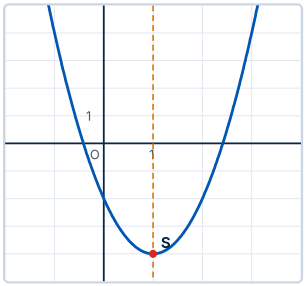
Exercice 14 — Trinôme et parabole ★

1. $f(x) = 2(x^2 - 2x) - 2 = 2\big[(x-1)^2 - 1\big] - 2$, soit
   $\boxed{f(x) = 2(x-1)^2 - 4}$
   Sommet $S(1;-4)$; axe de symétrie : la droite $x = 1$.
2. $a = 2 > 0$: la parabole est tournée vers le haut.

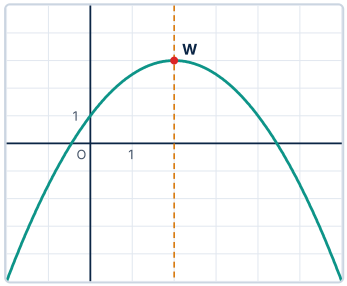
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	↘		-4		↗

3. $g(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x) + 1 = -\frac{1}{2}\big[(x-2)^2 - 4\big] + 1$, soit
   $\boxed{g(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3}$
   Sommet $W(2;3)$; axe : $x = 2$; $a = -\frac{1}{2} < 0$: parabole tournée vers le bas.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g	↗		3		↘



$(\mathcal{C}_f)$



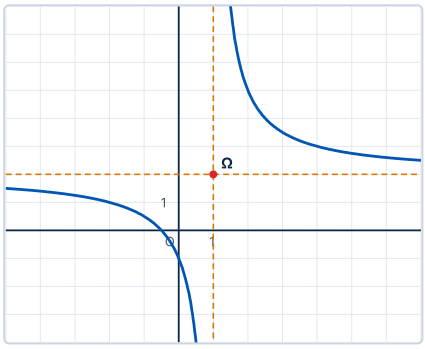
$(\mathcal{C}_g)$

Exercice 15 — Fonction homographique ★★

1. $x - 1 \neq 0$: $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$. Pour $x \neq 1$: $2 + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+3}{x-1} = \dfrac{2x+1}{x-1} = f(x)$.
2. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $a = 2, b = 1, c = 1, d = -1$:
   $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 < 0$.
   Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	↘		‖		↘

3. $(\mathcal{C}_f)$ est une hyperbole de centre $\boxed{\Omega(1;2)}$, d'asymptotes les droites $\boxed{x = 1 \text{ et } y = 2}$.
   Points utiles : $f(0) = -1$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $f(2) = 5$, $f(4) = 3$.



Exercice 16 — Composée de deux fonctions ★

1. f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $g \circ f$ et $f \circ g$ aussi.
   $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 2(x^2 - 2x + 3) + 1$:
   $\boxed{(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 7}$
   $(f \circ g)(x) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 3$:
   $\boxed{(f \circ g)(x) = 4x^2 + 2}$
   On remarque que $g \circ f \neq f \circ g$.
2. $x \in D_{v\circ u} \iff x \in D_u$ et $u(x) \in D_v \iff 3x + 4 \neq -1 \iff x \neq -\dfrac{5}{3}$.
   $\boxed{D_{v\circ u} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}}$ et $\boxed{(v \circ u)(x) = \dfrac{1}{3x+5}}$

Exercice 17 — Décomposition et variations ★★

1. $h_1 = g \circ f$ avec $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
   $h_2 = g \circ f$ avec $f(x) = x + 3$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
2. $h = g \circ f$ avec $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
   - f est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$;
   - pour $x \leq 1$, $f(x) = 1 - x \geq 0$: $f\big(]-\infty;1]\big) \subset [0;+\infty[$;
   - g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

   Les deux fonctions ont des sens de variation contraires, donc
   $\boxed{h \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty;1]}$

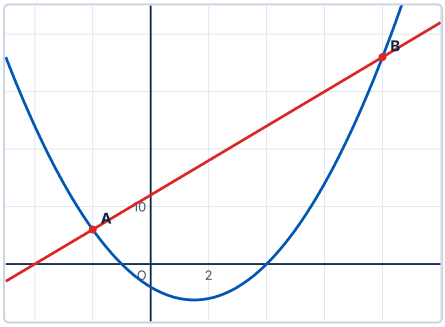
x	$-\infty$		1
h	↘		0

Exercice 18 — Fonctions périodiques ★★

1. f et g sont définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :
   $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(4x+2\pi-1)=\sin(4x-1)=f(x)$;
   $g\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)=\cos(5x+2\pi)=\cos(5x)=g(x)$.
   $\frac{\pi}{2}$ est une période de f et $\frac{2\pi}{5}$ une période de g.
2. h est de période 2 : $h(x+2k)=h(x)$ pour tout entier k. On se ramène à $[0;2[$:
   $h(4{,}5)=h(0{,}5+2\times 2)=h(0{,}5)=1-0{,}25$:
   $h(4{,}5)=0{,}75$
   $h(-3{,}5)=h(0{,}5-2\times 2)=h(0{,}5)$: $h(-3{,}5)=0{,}75$
   $h(2027)=h(1+2\times 1013)=h(1)=2-1$: $h(2027)=1$

Exercice 19 — Parabole et droite ★★

1. Avec l'axe des ordonnées : $f(0)=-4$, point $(0;-4)$.
   Avec l'axe des abscisses : $x^2-3x-4=0$, $\Delta=25$, $x=-1$ ou $x=4$: points $(-1;0)$ et $(4;0)$.
2. $f(x)=g(x)\iff x^2-6x-16=0$; $\Delta=100$;
   $x=-2$ **ou** $x=8$
   $(\mathcal{C}_f)$ et (D) se coupent en $A(-2;6)$ et $B(8;36)$.
3. $f(x)-g(x)=x^2-6x-16=(x+2)(x-8)$, positif à l'extérieur des racines :
   $S=]-\infty;-2]\cup[8;+\infty[$
   $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty;-2[$ et sur $]8;+\infty[$, en dessous sur $]-2;8[$.

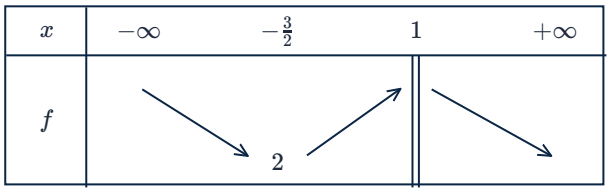


Exercice 20 — Problème de synthèse ★★★

1. g est homographique, $D_g=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, de déterminant $2\times(-1)-3\times 1=-5<0$: g est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
   $h:x\mapsto x^2+2$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   Signe de g :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$

2. Pour $x\neq 1$: $(h\circ g)(x)=\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2+2=$
   $\frac{4x^2+12x+9+2(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$.
   $f=h\circ g$ **sur** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
3. **Sur** $]1;+\infty[$: g est décroissante et $g(x)>0$, donc $g(x)\in[0;+\infty[$ où h est croissante : **f décroissante**
   Sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$: g est décroissante et $g(x)\leq 0$, donc $g(x)\in]-\infty;0]$ où h est décroissante : **f croissante**
   Sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$: g est décroissante et $g(x)\geq 0$, où h est croissante : **f décroissante**



$f\left(-\frac{3}{2}\right)=h(0)=2$ est le minimum de f sur $]-\infty;1[$.