Royaume du Maroc
Ministère de l'Éducation Nationale
AREF Marrakech-Safi • DP : Marrakech
Lycée Qualifiant Toubkal

SAKINE PRO

DEVOIR MAISON

Corrigé Détaillé • Logique et Fonctions

Année Scolaire : 2026/2027
Niveau : **1ère Année Bac - Sciences**
Matière : Mathématiques
Enseignant : **Pr. SAKINE BADR**

PARTIE A • NOTIONS DE LOGIQUE

Exercice 1 : Quantificateurs et négation

Corrigé

Rappel : pour nier une proposition quantifiée, on échange $\forall$ et $\exists$, puis on nie la propriété. La négation de $\geq$ est $<$, celle de $=$ est $\neq$, celle de $>$ est $\leq$.

1. P_1 est **vraie** : le carré d'un réel est toujours positif ou nul.
   Négation : « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$ ».
2. P_2 est **fausse** : pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc x^2 ne peut pas être égal à -1.
   Négation : « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -1$ ».
3. P_3 est **fausse**. Contre-exemple : pour $x = \frac{1}{2}$, on a $x^2 = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.
   Négation : « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < x$ ».
4. P_4 est **vraie** : pour un entier n quelconque, l'entier $m = n + 1$ convient, car $n + 1 > n$.
   Négation : « $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \leq n$ ».

Exercice 2 : Table de vérité et implication

Corrigé

1.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P}$ ou Q	$P \implies Q$
V	V	F	**V**	**V**
V	F	F	**F**	**F**
F	V	V	**V**	**V**
F	F	V	**V**	**V**

Les deux dernières colonnes sont identiques : les propositions « $P \implies Q$ » et « $\overline{P}$ ou Q » sont **équivalentes**. L'implication n'est fausse que dans un seul cas : P vraie et Q fausse.

2. D'après la question 1, nier « $P \implies Q$ » revient à nier « $\overline{P}$ ou Q ». Par la loi de De Morgan, la négation d'un « ou » est le « et » des négations :

$$\overline{\overline{P} \text{ ou } Q} \iff \overline{\overline{P}} \text{ et } \overline{Q} \iff P \text{ et } \overline{Q}.$$

3. Ici P est « $x > 2$ » et Q est « $x^2 > 4$ », donc $\overline{P}$ est « $x \leq 2$ » et $\overline{Q}$ est « $x^2 \leq 4$ ».
   - **Contraposée** ($\overline{Q} \implies \overline{P}$) : « $x^2 \leq 4 \implies x \leq 2$ ».
   - **Négation** (P et $\overline{Q}$) : « $x > 2$ et $x^2 \leq 4$ ».

Exercice 3 : Quatre raisonnements

Corrigé

1. Contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition « pour tout » est fausse, un seul contre-exemple suffit. Prenons $x = -3$: on a bien $-3 < 2$, mais $(-3)^2 = 9$ et 9 n'est pas strictement inférieur à 4. L'implication est fausse pour $x = -3$, donc la proposition est **fausse**.

2. Contraposition

La contraposée de « n^2 impair $\Longrightarrow$ n impair » est : « n pair $\Longrightarrow$ n^2 pair ». Montrons-la.

Supposons n pair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$, donc n^2 est pair.

La contraposée est vraie, donc l'implication de départ est vraie : si n^2 est impair, alors n est impair.

3. Disjonction des cas

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **1er cas : n est pair.** Alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$: c'est un nombre pair.
- **2ème cas : n est impair.** Alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $n^2 + n = (4k^2 + 4k + 1) + (2k + 1) = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$: c'est un nombre pair.

Dans les deux cas, $n^2 + n$ est pair. *Autre idée : $n^2 + n = n(n+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, dont l'un est pair.*

4. Récurrence

Pour $n \geq 1$, notons $P(n)$: « $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ ».

- **Initialisation ($n = 1$) :** le membre de gauche vaut 1 et $1^2 = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité :** soit $n \geq 1$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$, c'est-à-dire $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$.
  D'après l'hypothèse de récurrence : $\underbrace{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}_{= n^2} + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 1$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

PARTIE B • GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Exercice 4 : Ensemble de définition

Corrigé

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-9}$. Le dénominateur doit être non nul : $x^2 - 9 \neq 0 \iff (x-3)(x+3) \neq 0 \iff x \neq 3$ et $x \neq -3$.
   Donc $\mathbf{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}}$.

2. $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$. Il faut $4 - 2x \geq 0 \iff -2x \geq -4 \iff x \leq 2$ *(on divise par $-2 < 0$: le sens de l'inégalité change).*
   Donc $\mathbf{D_f =]-\infty, 2]}$.

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$. Il faut $x^2 - 5x + 4 \geq 0$. $\Delta = 25 - 16 = 9$, les racines sont $x_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$.
   Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines.
   Donc $\mathbf{D_f =]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[}$.

4. $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}$. La racine est au dénominateur : il faut $x - 1 > 0$ (strictement), soit $x > 1$.
   Donc $\mathbf{D_f =]1, +\infty[}$.

Exercice 5 : Parité

Corrigé

Méthode : 1) vérifier que D_f est centré en 0 ; 2) calculer $f(-x)$; 3) comparer avec $f(x)$ et $-f(x)$.

1. $D_f = \mathbb{R}$ est centré en 0. Pour tout réel x : $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$. Donc f est **paire**.
2. $D_g = \mathbb{R}^*$ est centré en 0. Pour tout $x \neq 0$: $g(-x) = (-x)^3 - \dfrac{2}{-x} = -x^3 + \dfrac{2}{x} = -(x^3 - \dfrac{2}{x}) = -g(x)$. Donc g est **impaire**.
3. $D_h = \mathbb{R}$ est centré en 0, mais $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$. On a $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$. Donc h n'est **ni paire ni impaire**.
4. $D_k = [1, +\infty[$ n'est pas centré en 0 : par exemple $2 \in D_k$ mais $-2 \notin D_k$. Donc k n'est **ni paire ni impaire**.

Exercice 6 : Étude d'un trinôme

Corrigé

1. Pour tout réel x : $(x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3 = f(x)$.
2. Un carré est positif ou nul : $(x-2)^2 \geq 0$, donc $f(x) = (x-2)^2 - 1 \geq -1$ pour tout réel x. De plus $f(2) = 0 - 1 = -1$: la valeur -1 est atteinte.
   Donc f admet un **minimum égal à -1, atteint en $x = 2$**.
3. Pour $x_1 \neq x_2$:
   $$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4).$$
   En divisant par $x_1 - x_2 \neq 0$: $T(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 - 4$.
4. • Sur $]-\infty, 2]$: $x_1 \leq 2$ et $x_2 \leq 2$ avec $x_1 \neq x_2$, donc $x_1 + x_2 < 4$ et $T(x_1, x_2) < 0$. f est **strictement décroissante**.
   • Sur $[2, +\infty[$: $x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 2$ avec $x_1 \neq x_2$, donc $x_1 + x_2 > 4$ et $T(x_1, x_2) > 0$. f est **strictement croissante**.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

5. **Avec l'axe des abscisses :** $f(x) = 0 \iff (x-2)^2 = 1 \iff x - 2 = 1$ ou $x - 2 = -1 \iff x = 3$ ou $x = 1$. Les points sont $A(1, 0)$ et $B(3, 0)$.
   Avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 3$. Le point est $C(0, 3)$.

Exercice 7 : Fonction homographique et encadrement

Corrigé

1. Il faut $x+1 \neq 0$, soit $x \neq -1$. Donc $\mathbf{D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$.

2. Pour tout $x \neq -1$: $2 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x+1} = g(x)$.

3. g est homographique avec $a=2$, $b=1$, $c=1$, $d=1$. Son déterminant est $\Delta = ad - bc = 2\times 1 - 1\times 1 = 1 > 0$.

- Donc g est **strictement croissante** sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
- Asymptote verticale : $x = -\dfrac{d}{c} = -1$. Asymptote horizontale : $y = \dfrac{a}{c} = 2$.
- Centre de symétrie : $W(-1,\, 2)$.

4. Soit $x \geq 0$. Alors $x+1 \geq 1 > 0$. On étudie le signe de deux différences :

- $g(x) - 1 = \dfrac{2x+1-(x+1)}{x+1} = \dfrac{x}{x+1} \geq 0$, donc $g(x) \geq 1$.
- $g(x) - 2 = -\dfrac{1}{x+1} < 0$, donc $g(x) < 2$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, +\infty[$: $1 \leq g(x) < 2$.

5.

- $g(x) \geq 1$ sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = \dfrac{1}{1} = 1$: la valeur 1 est atteinte. Donc 1 **est le minimum** de g sur $[0, +\infty[$.
- $g(x) < 2$ pour tout $x \geq 0$: l'équation $g(x) = 2$ n'a pas de solution. Donc 2 est un majorant, mais **ce n'est pas un maximum**.

Exercice 8 : Composée et périodicité

Corrigé

1. $u(x) = 2x - 6$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $v(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$.

a. $x \in D_{v\circ u} \iff x \in D_u$ et $u(x) \in D_v \iff 2x - 6 \geq 0 \iff x \geq 3$.
Donc $\mathbf{D_{v\circ u} = [3, +\infty[}$ et, pour tout $x \geq 3$: $(v \circ u)(x) = v(2x-6) = \sqrt{2x-6}$.

b. u est une fonction affine de coefficient $2 > 0$: elle est croissante sur $[3, +\infty[$, et pour $x \geq 3$ on a $u(x) \geq 0$, donc $u([3, +\infty[) \subset [0, +\infty[$. La fonction v est croissante sur $[0, +\infty[$.
u et v ont le **même sens** de variation, donc $v \circ u$ est **croissante** sur $[3, +\infty[$.

2. Pour $x \mapsto \cos(ax+b)$, la période est $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$. Ici $a = 4$, donc $\mathbf{T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}}$.
Vérification : pour tout réel x, $h\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(4x + 2\pi\right) = \cos(4x) = h(x)$, car le cosinus est de période 2π.

Lycée Qualifiant Toubkal • Année Scolaire 2026/2027 • **Pr. SAKINE BADR**